Olá pessoal!

Somos Anderson Lucas e Mariana e iremos apresentar por meio desses slides a aula de hoje sobre trigonometria 2.

Trigonometria 2

O que vamos aprender nessa aula?

- Área de um triângulo qualquer
- Área de um triângulo equilátero
- Área de um triângulo isósceles
- Área de um triângulo escaleno
- Lei das áreas e sua demonstração
- Equações trigonométricas fundamentais
- Círculo trigonométrico
- As Razões Inversas do Seno, Cosseno e da Tangente

Antes de começarmos

- Observe que deixamos alguns links com vídeos online que devem ser vistos para o melhor entendimento da matéria.
- Também separamos alguns exercícios, além dos que estão contidos nessas apresentações, que estarão disponíveis em PDF.
- Qualquer dúvidas que tiverem, estaremos disponíveis para tirá-las. Contem conosco.

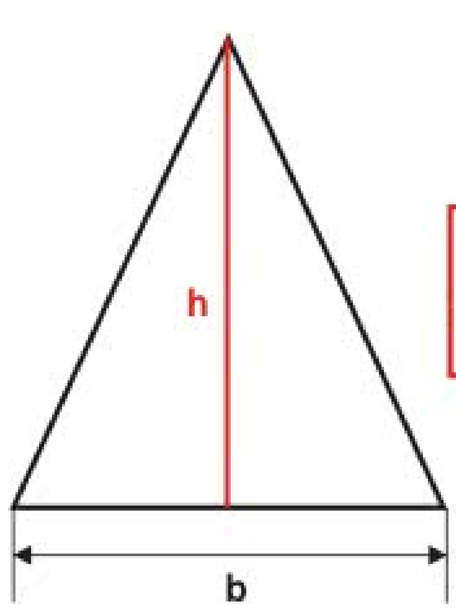
BONS ESTUDOS!

Área de um triângulo qualquer

Fórmula Geral

Existem várias maneiras de calcular a área de um triângulo, nessa aula vamos mostrar as principais delas.

Uma forma muito comum de encontrar a área de um triângulo é usando a base e a altura do triângulo. Ou seja:



$$\boxed{\text{Área} = \frac{b.h}{2}}$$

Sendo,

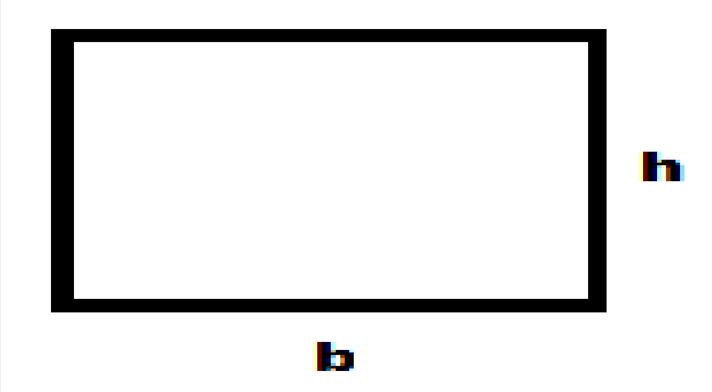
Área: área do triângulo

b: base

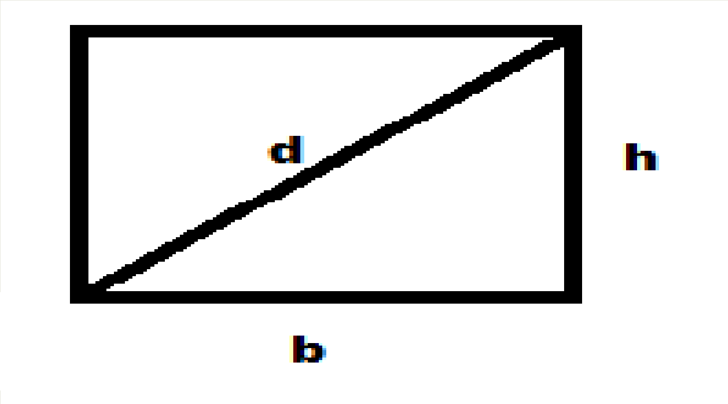
h:altura

Fórmula Geral

Essa fórmula pode ser encontrada através da fórmula da área de um retângulo.



Área = b.h



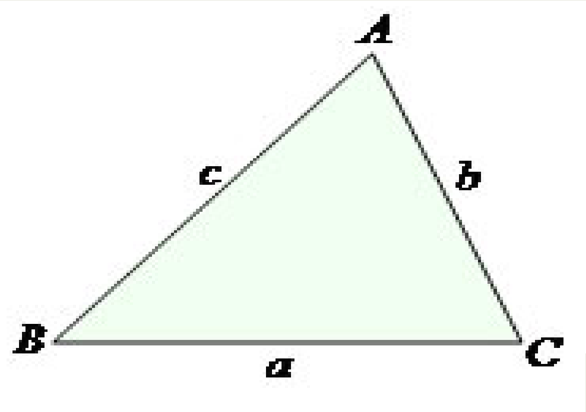
Ao traçarmos a diagonal de um retângulo achamos dois triângulos iguais. Para encontrar a área destes triângulos basta dividir a área do retângulo em duas partes iguais. Ou seja:

$$\text{Área dos Triângulos: } \frac{\textbf{área do retângulo}}{\textbf{2}}$$

Fórmula Geral

Contudo, só podemos utilizar a fórmula anterior se possuirmos a altura do triângulo. Se não tivermos a altura, mas se possuirmos todos os lados do triângulo podemos utilizar uma outra maneira para encontrar a área. Podemos usar a fórmula de Heron.

Dessa forma, temos:



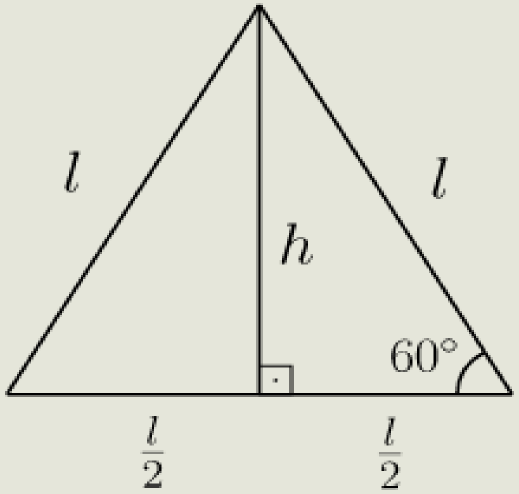
$$A = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$$

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

Onde:
a, **b** e **c** são os lados do triângulo.
p é o valor do semiperímetro (soma de todos os lados do triângulo dividido por dois)

Área do triângulo equilátero:

O triângulo equilátero é um tipo de triângulo que possui todos os lados e ângulos internos iguais.



Como todos os lados do triângulo equilátero são iguais, se tivermos um lado, na verdade temos os três, então podemos usar a fórmula de Heron, do slide anterior, para calcular a área desse triângulo.

Entretanto, se não quisermos usar a fórmula de Heron, existe outra maneira para calcular a área de um triângulo equilátero. Podemos dividir o triângulo equilátero em dois triângulos retângulos (como na imagem ao lado) e calcular a altura pelo teorema de pitágoras para usar a fórmula geral. Dessa maneira, temos:

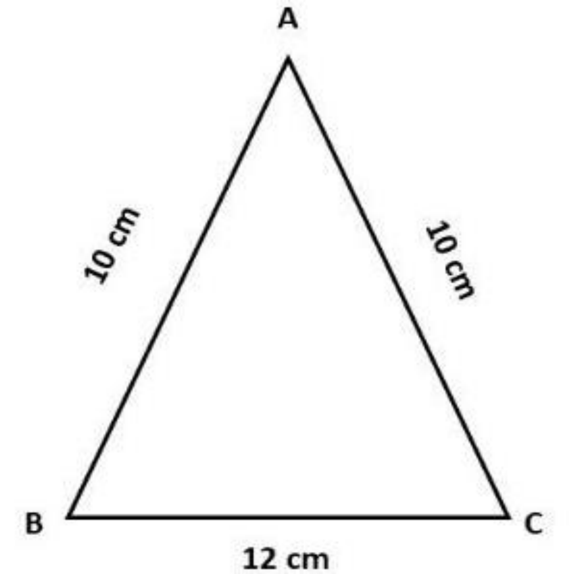
$$L^2 = h^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = L^2 - \frac{L^2}{4} \Rightarrow h = \sqrt{\frac{3L^2}{4}} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}\,L}{2}$$

Substituindo o valor de h na fórmula geral, temos:

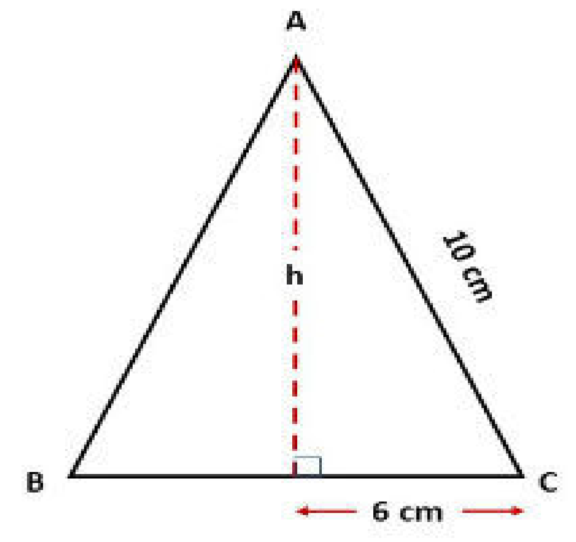
$$\text{Área} = \frac{Lh}{2} \Rightarrow \boxed{\text{Área} = \frac{\sqrt{3}}{4}L^2}$$

Área do triângulo isósceles

O triângulo isósceles é um tipo de triângulo que possui dois lados e dois ângulos internos iguais.



No exemplo ao lado, já que possuímos todos os lados do triângulo, também poderíamos usar a fórmula de Heron para calcular a área, mas se quisermos usar a fórmula geral, podemos dividir o triângulo isósceles em dois triângulos retângulos, como no exemplo do slide anterior, e usar o Teorema de Pitágoras para descobrir a altura.



$$10^2 = h^2 + 6^2$$
$$h^2 = 100 - 36$$
$$h = \sqrt{64} = 8$$

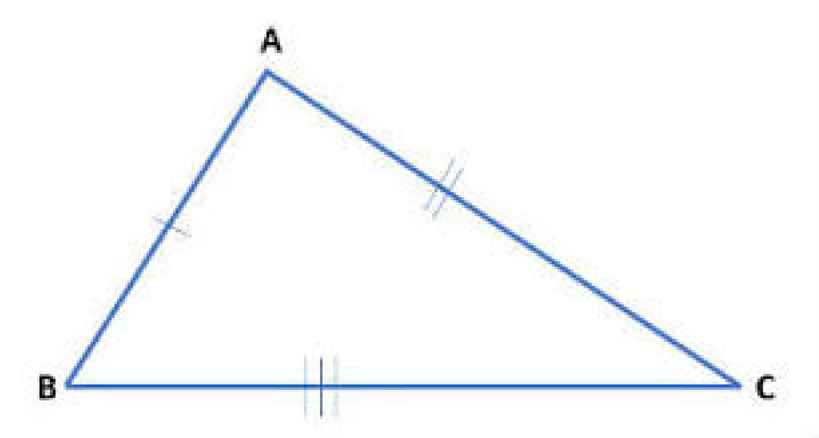
Substituindo os dados na fórmula geral, temos:

$$A = \frac{b.h}{2} = \frac{12.8}{2}$$

$$\boxed{A = 48\ cm^2}$$

Área do triângulo escaleno

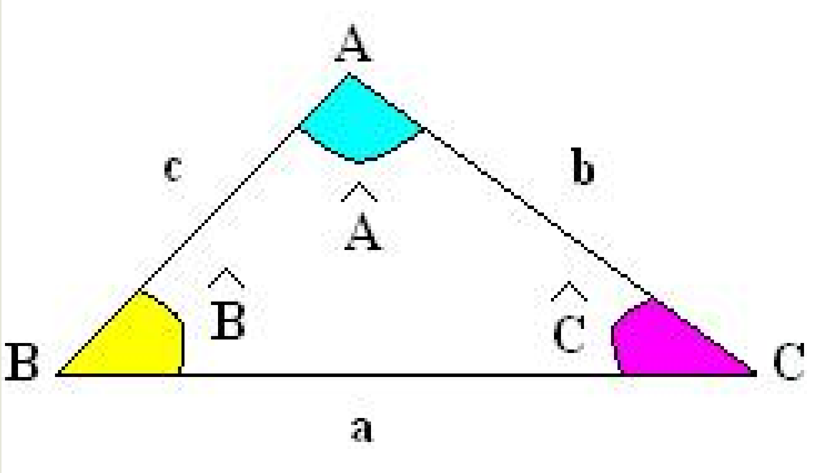
O triângulo escaleno é um tipo de triângulo que possui todos os lados e ângulos internos diferentes.



Para calcular a área do triângulo, usamos ou a fórmula geral, se tivermos a altura e a base, ou usamos a fórmula de Heron se tivermos todos os lados.
Entretanto, existe uma outra maneira para calcular a área não só do triângulo escaleno mas também de qualquer triângulo. Veremos essa forma nos próximos slides.

Lei das Áreas

Uma forma bem comum para obter a área de um triângulo é usando a Lei das Áreas.
Se conhecermos dois lados de um triângulo e o ângulo entre eles, podemos usar a trigonometria para calcular a área desse triângulo.



- Considerando o ângulo $\hat{A}$, iremos utilizar o sen $\hat{A}$ e os lados b e c.

$$A = \frac{b \cdot c \cdot \text{sen}\,\hat{A}}{2}$$

- Considerando o ângulo $\hat{C}$, iremos utilizar o sen $\hat{C}$ e os lados a e b:

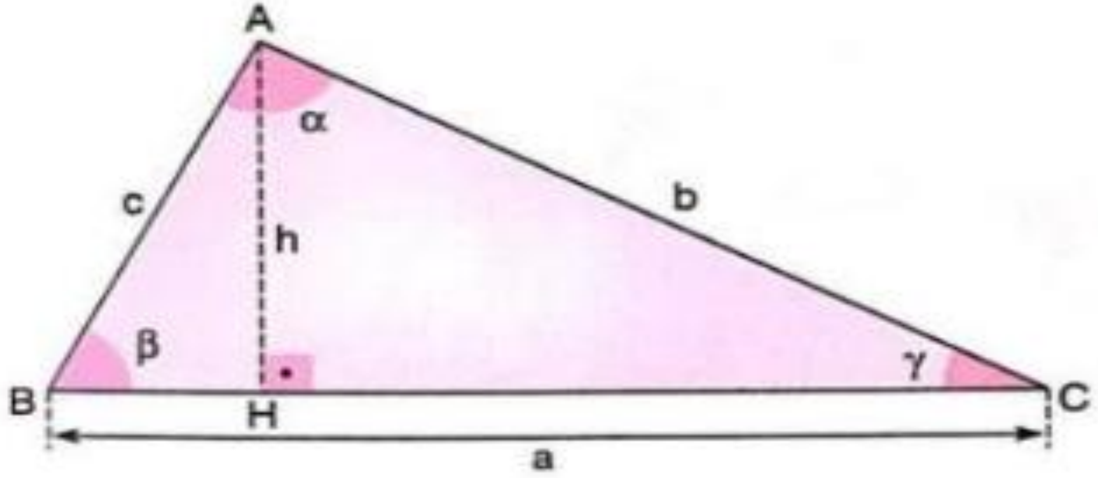
$$A = \frac{a \cdot b\ \text{sen}\,\hat{C}}{2}$$

- Considerando o ângulo $\hat{B}$, iremos utilizar o sen $\hat{B}$ e os lados a e c:

$$A = \frac{a \cdot c\ \text{sen}\,B}{2}$$

Demonstração da Lei das Áreas

1. O triângulo ABC da figura é acutângulo.



Sabemos que a área S é dada por:

$$S = \frac{a \cdot h}{2} \quad (I)$$

Do triângulo retângulo AHC, vem:

$$\text{sen}\,\gamma = \frac{h}{b} \Rightarrow h = b \cdot \text{sen}\,\gamma \quad (II)$$

Substituindo (II) em (I), obtemos:

$$S = \frac{a \cdot (b \cdot \text{sen}\,\gamma)}{2} \Rightarrow \quad S = \frac{a \cdot b \cdot \text{sen}\,\gamma}{2}$$

Área de um triângulo qualquer:

Para um melhor entendimento do assunto separamos uma aula online:

Link da aula: https://www.youtube.com/watch?v=9dCrIEpRYOY

Equações Trigonométricas

Para que exista uma equação qualquer é preciso que tenha pelo menos uma incógnita e uma igualdade.

Agora, para ser uma equação trigonométrica é preciso que, além de ter essas características gerais, é preciso que a função trigonométrica seja a função de uma incógnita.

sen x = cos 2x
sen 2x – cos 4x = 0
4 . sen3 x – 3 . sen x = 0

São exemplos de equações trigonométricas, pois a incógnita pertence à função trigonométrica.

x2 + sen 30° . (x + 1) = 15
Esse é um exemplo de equação do segundo grau e não de uma equação trigonométrica, pois a incógnita não pertence à função trigonométrica.

Equações Trigonométricas Fundamentais

sen(x) = sen(a)

Fórmulas:

1- $a + 2k\pi$

ou

2- $(\pi - a) + 2k\pi$

Conjunto solução

$S = \{x \in R \mid x = a + 2k\pi \text{ ou } x = (\pi - a) + 2k\pi, k \in Z\}$

OBS: Sempre precisamos usar as duas fórmulas no conjunto solução.

Equações Trigonométricas Fundamentais

Exemplo para o Seno:

$\text{sen}x = \text{sen}(\pi/5)$

Substituindo nas fórmulas, temos:
$x = \pi/5 + 2k\pi, k \in Z$
ou
$x = (\pi - \pi/5) + 2k\pi = 4\pi/5 + 2k\pi, k \in Z$

Conjunto solução:

$S = \{x \in R \mid x = \pi/5 + 2k\pi \text{ ou } x = 4\pi/5 + 2k\pi, k \in Z\}$

Equações Trigonométricas Fundamentais

$\cos(x) = \cos(a)$

Fórmulas:

1- $a+2k\pi$

ou

2- $-a + 2k\pi$

Conjunto solução:

$S = \{x \in R \mid x = a + 2k\pi \text{ ou } x = -a + 2k\pi, k \in Z\}$

Equações Trigonométricas Fundamentais

Exemplo para o Cosseno

$\cos x = \cos(\pi/3)$

Substituindo nas fórmulas, temos:

$x = \pi/3 + 2k\pi, k \in Z$

ou

$x = -\pi/3 + 2k\pi, k \in Z$

Conjunto solução:

$S = \{x \in R \mid x = \pi/3 + 2k\pi \text{ ou } x = -\pi/3 + 2k\pi, k \in Z\}$

Equações Trigonométricas Fundamentais

$tg(x) = tg(a)$

Fórmulas:

1- $a+2k\pi$

ou

2- $(a+\pi) + 2k\pi$

Conjunto solução:

$S = \{x \in R \mid x = a + 2k\pi \text{ ou } x = (a+\pi) + 2k\pi, k \in Z\}$

Equações Trigonométricas Fundamentais

Exemplo para a Tangente

$tgx = 1$
Como já se sabe, $tg(\pi/4) = 1$.

Temos:

$x = \pi/4 + 2k\pi,\ k \in Z$
ou
$x = (\pi/4+\pi) + 2k\pi = 5\pi/4 + 2k\pi,\ k \in Z$

Conjunto solução:

$S = \{x \in R \mid x = \pi/4 + 2k\pi \text{ ou } x = 5\pi/4 + 2k\pi,\ k \in Z\}$

Equações Trigonométricas

Nessa aula falamos um pouco só sobre as Equações Trigonométricas fundamentais, contudo, o assunto é bem mais vasto. Por esse motivo, separamos algumas aulas online para o melhor entendimento do assunto. Nesse material disponibilizamos apenas o conteúdo básico, entretanto os vestibulares exigem um conhecimento mais aprofundado do assunto, por isso esperamos que você dedique alguns minutos do seu dia para visualizar as aulas.

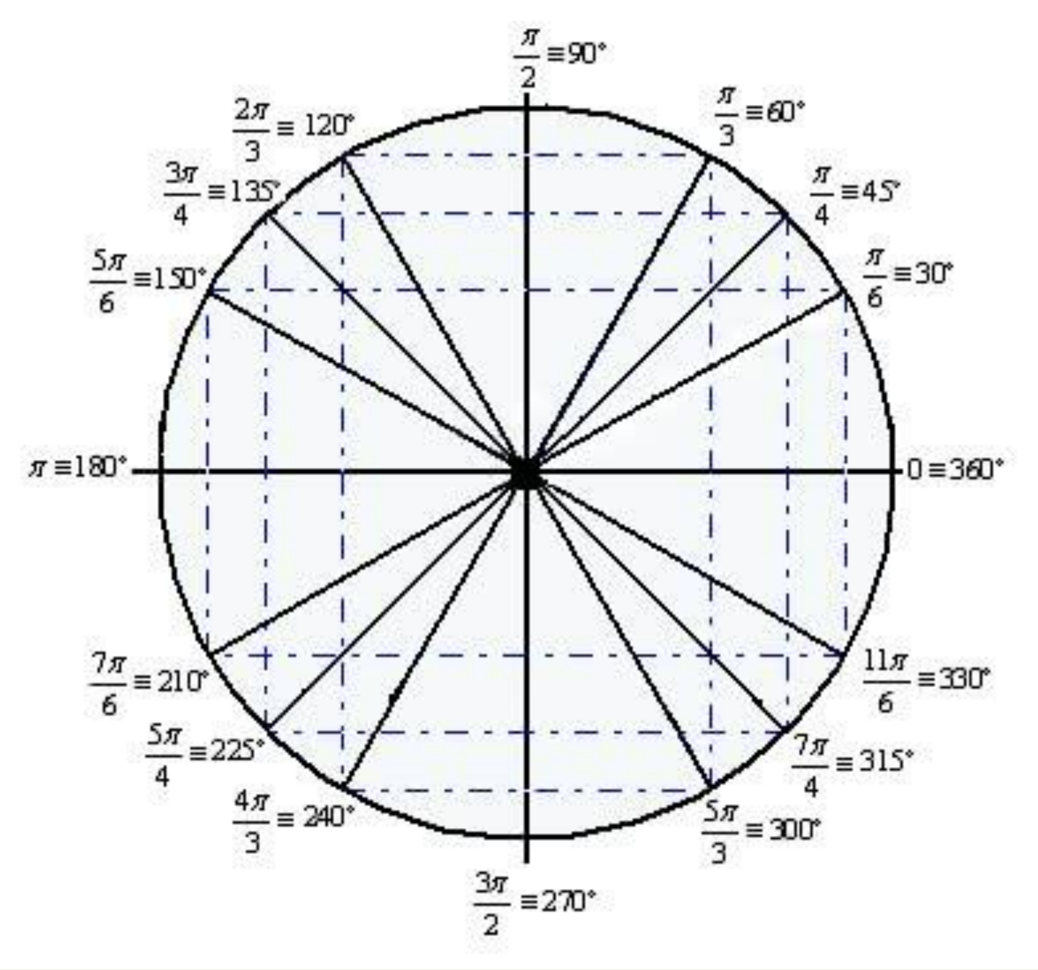
Links para as aulas: https://www.youtube.com/watch?v=-LFDt4m4TpI&t=713s
https://www.youtube.com/watch?v=VVLAULiSSYM&t=375s
https://www.youtube.com/watch?v=IOF3GUbuLdc

Círculo trigonométrico

O que é o círculo trigonométrico?

Círculo trigonométrico

- O círculo trigonométrico é uma circunferência de raio 1 usada para representar números reais relacionados a ângulos. Sendo assim, cada ponto dessa circunferência está relacionado a um número real, que, por sua vez, representa um ângulo. Assim, é possível representar também valores de seno e cosseno.



Círculo trigonométrico – Abordagem simplificada

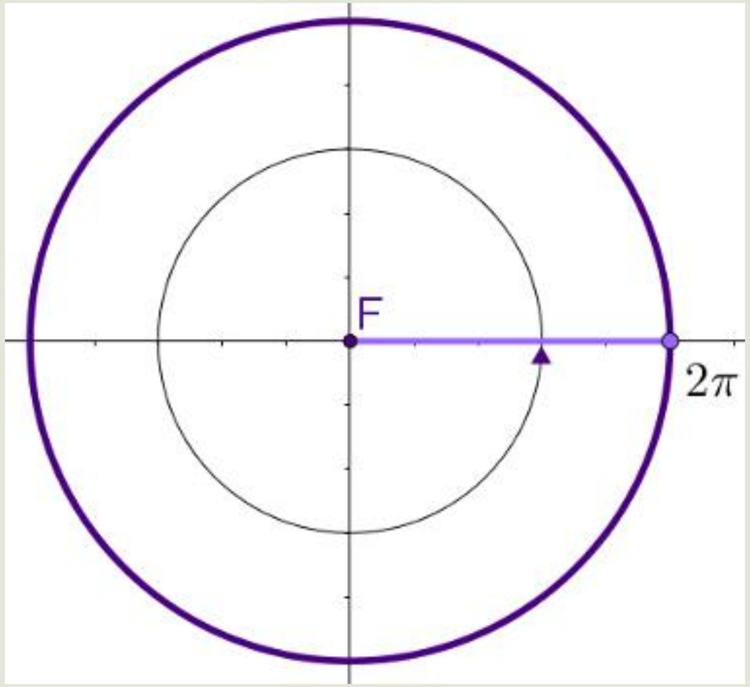
O centro desse círculo está sobre o ponto F = (0,0) do plano cartesiano e, como o raio dele é 1, podemos calcular seu comprimento da seguinte maneira:

$C = 2 \cdot \pi \cdot r$

$C = 2 \cdot \pi \cdot 1$

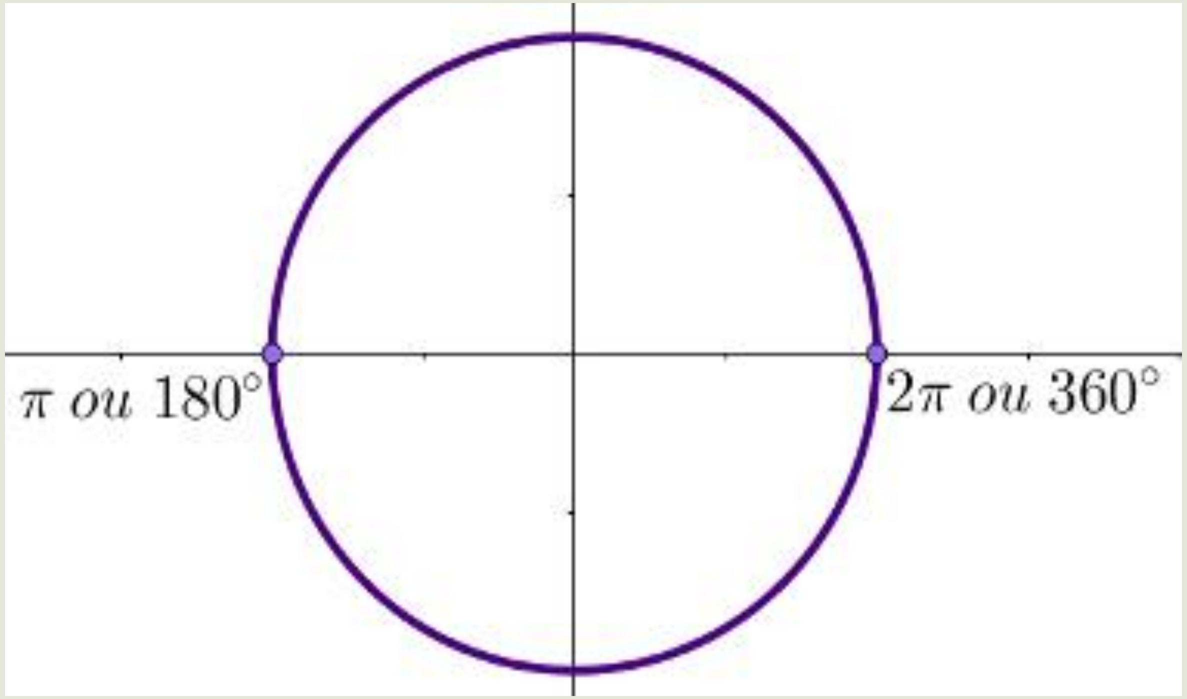
$C = 2 \cdot \pi$

r é o raio



Círculo trigonométrico – Abordagem simplificada

A ideia de volta está presente nos círculos trigonométricos. Como o comprimento da circunferência é $2 \cdot \pi$, podemos dizer que uma volta completa nesses círculos tem essa medida. Repare apenas que o ângulo formado por essa volta mede 360°. Dessa maneira, o número $2 \cdot \pi$ relaciona-se com o ângulo 360°.



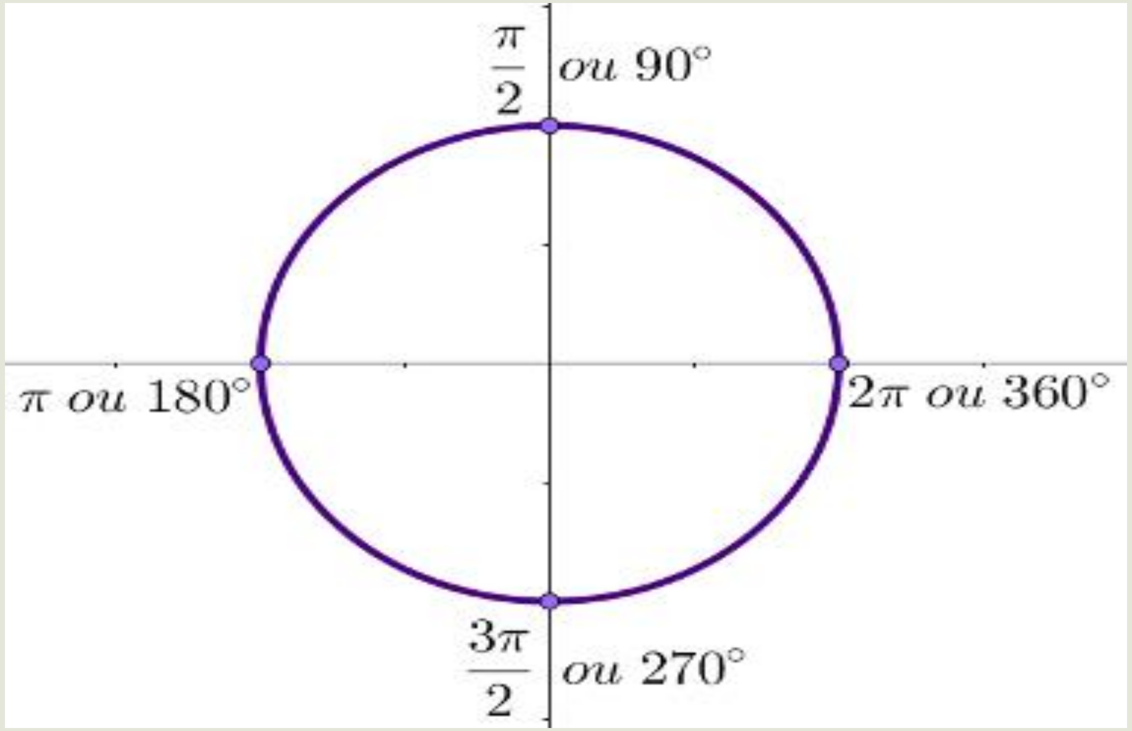
Assumindo que essas voltas sejam feitas no sentido anti-horário, vamos calcular o valor numérico e o ângulo correspondente à meia-volta:

$$C/2 = (2 \cdot \pi)/2 = \pi$$

Portanto, meia-volta é igual a π. O ângulo gerado por meia-volta é 180°, pois é metade de 360°.

Círculo trigonométrico – Abordagem simplificada

Qualquer número real pode ser representado em um círculo trigonométrico. O comum, entretanto, é usar os números que vão de 0 a $2 \cdot \pi$ e os ângulos referentes a esse intervalo. A figura a seguir mostra a localização dos pontos correspondentes aos ângulos 0°, 90°, 180°, 270° e 360° e os números reais, em função de π, relacionados.



Círculo trigonométrico – Abordagem simplificada

Os ângulos presentes na figura ao lado marcam posições muito importantes no círculo trigonométrico chamados de quadrantes. Eles são definidos no sentido anti-horário.

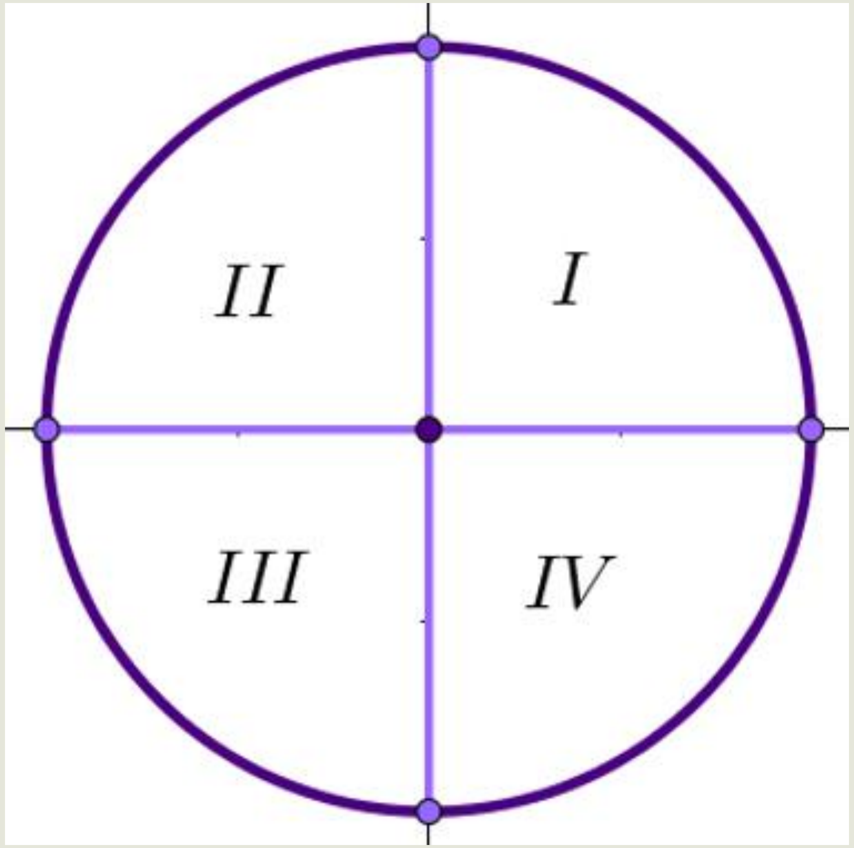
Em cada um desses quadrantes pode ser encontrado um intervalo de números reais em função de π em que cada valor está relacionado a um ângulo.

Quadrante I: contém os números reais que vão de 0 até π/2 e os ângulos entre 0° e 90°.

Quadrante II: contém os números reais que vão de π/2 até π e os ângulos entre 90° e 180°.

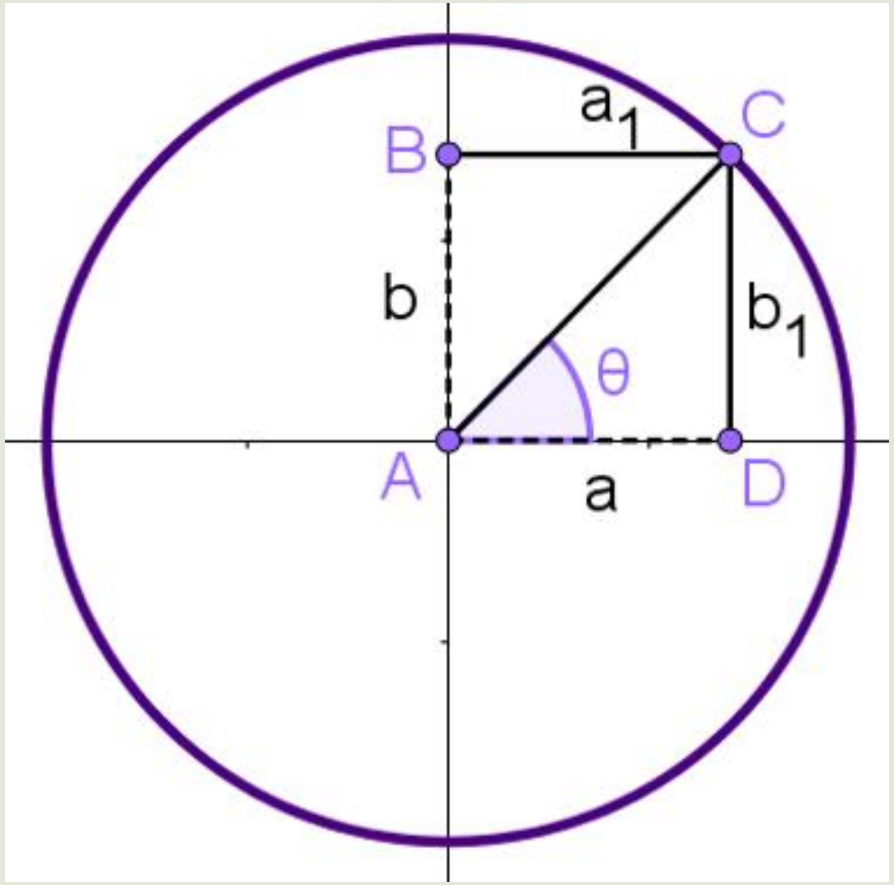
Quadrante III: contém os números reais que vão de π até 3π/2 e os ângulos entre 180° e 270°.

Quadrante VI: contém os números reais que vão de 3π/2 até 2π e os ângulos entre 270° e 360°.



Círculo trigonométrico – Abordagem simplificada

No círculo trigonométrico, é possível encontrar os valores de seno e de cosseno de um ângulo θ qualquer. Para tanto, é necessário construir esse ângulo no círculo trigonométrico, como foi feito na imagem ao lado.



Note que, tomando os segmentos BC e AB, paralelos a AD e DC, respectivamente, temos um retângulo. Podemos notar que a medida do lado CD = b1 é igual ao senθ, pois:

Senθ = CD/AC = b1/1 = b1

A medida do segmento AD = a é igual ao Cosθ, pois:

Cosθ = AD/AC = a/1 = a

A medida do segmento AC é 1 porque AC é o raio da circunferência. Essa medida é a altura do retângulo.

Círculo trigonométrico – Abordagem simplificada

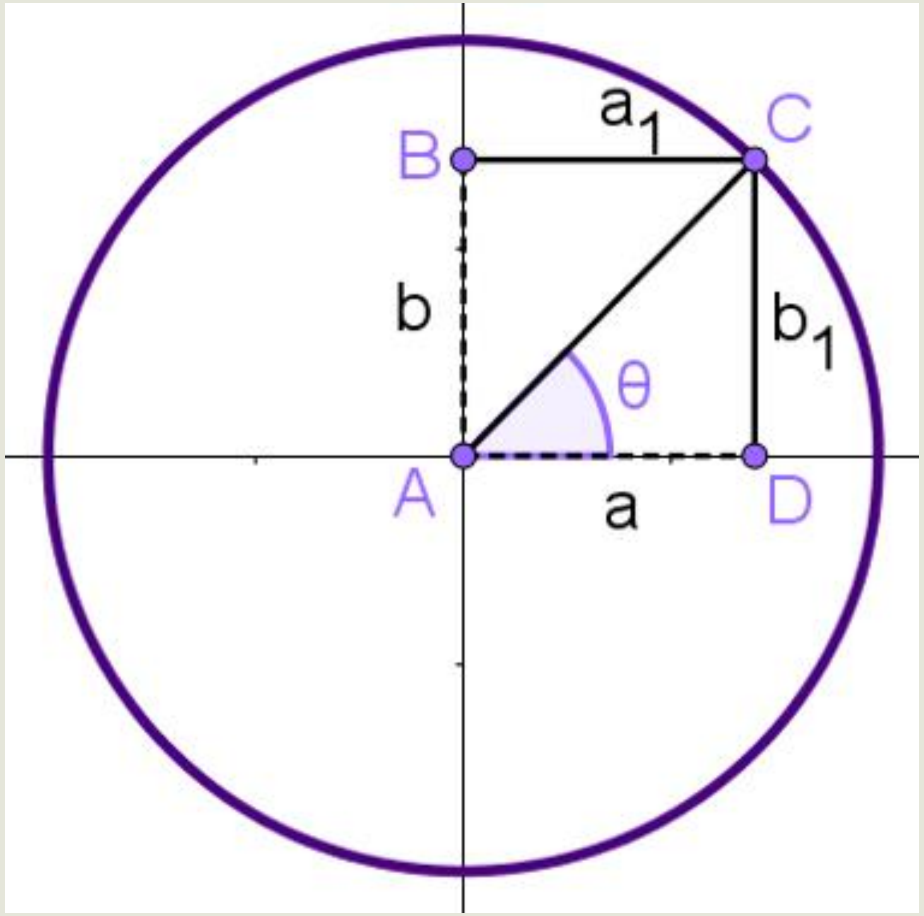
A medida do segmento AD = a é igual ao cosθ, pois:

$\cos\theta = AD/AC = a/1 = a$

Sendo assim, no círculo trigonométrico, as medidas de seno e cosseno de θ são iguais às medidas do cateto oposto e adjacente a esse ângulo.

Podemos calcular agora os valores mais importantes para seno e cosseno. Observe no círculo trigonométrico que:

- Quando $\theta = 0°$, $\text{sen}\theta = 0$ e $\cos\theta = 1$.
- Quando $\theta = 90°$, $\text{sen}\theta = 1$ e $\cos\theta = 0$.
- Quando $\theta = 180°$, $\text{sen}\theta = 0$ e $\cos\theta = -1$.
- Quando $\theta = 270°$, $\text{sen}\theta = -1$ e $\cos\theta = 0$.
- Quando $\theta = 360°$, senθ e cosθ possuem os mesmos valores do caso em que θ é igual a 0°.

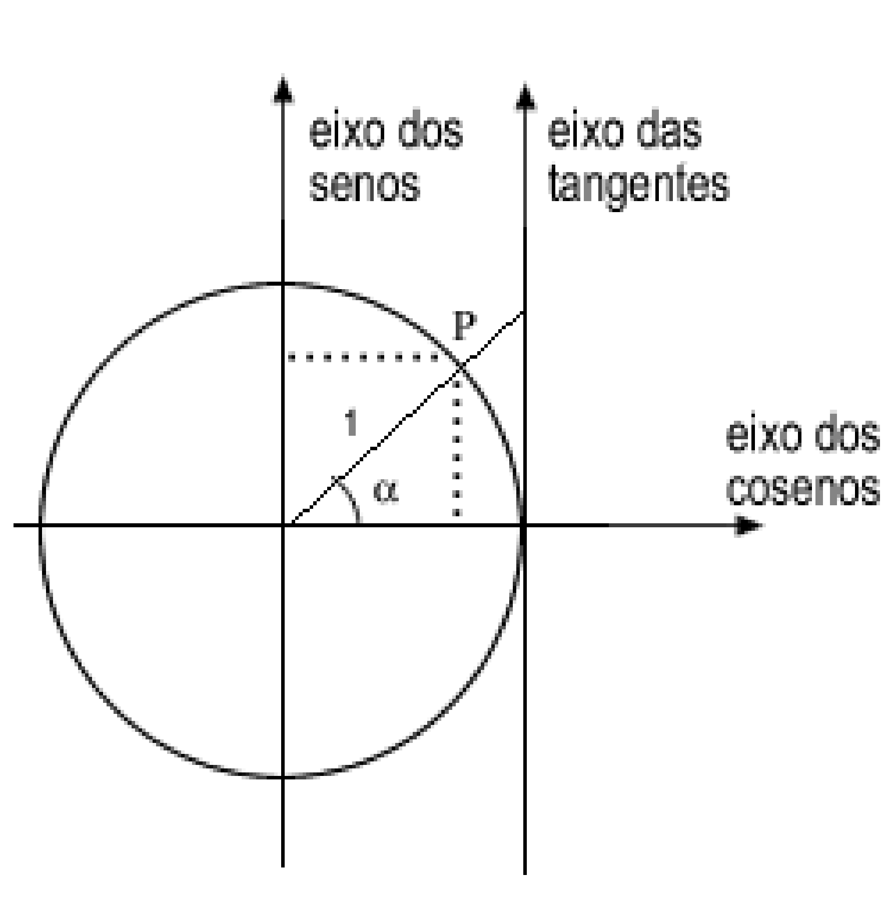


Círculo trigonométrico – Abordagem simplificada

A imagem ao lado representa o eixo das tangentes.

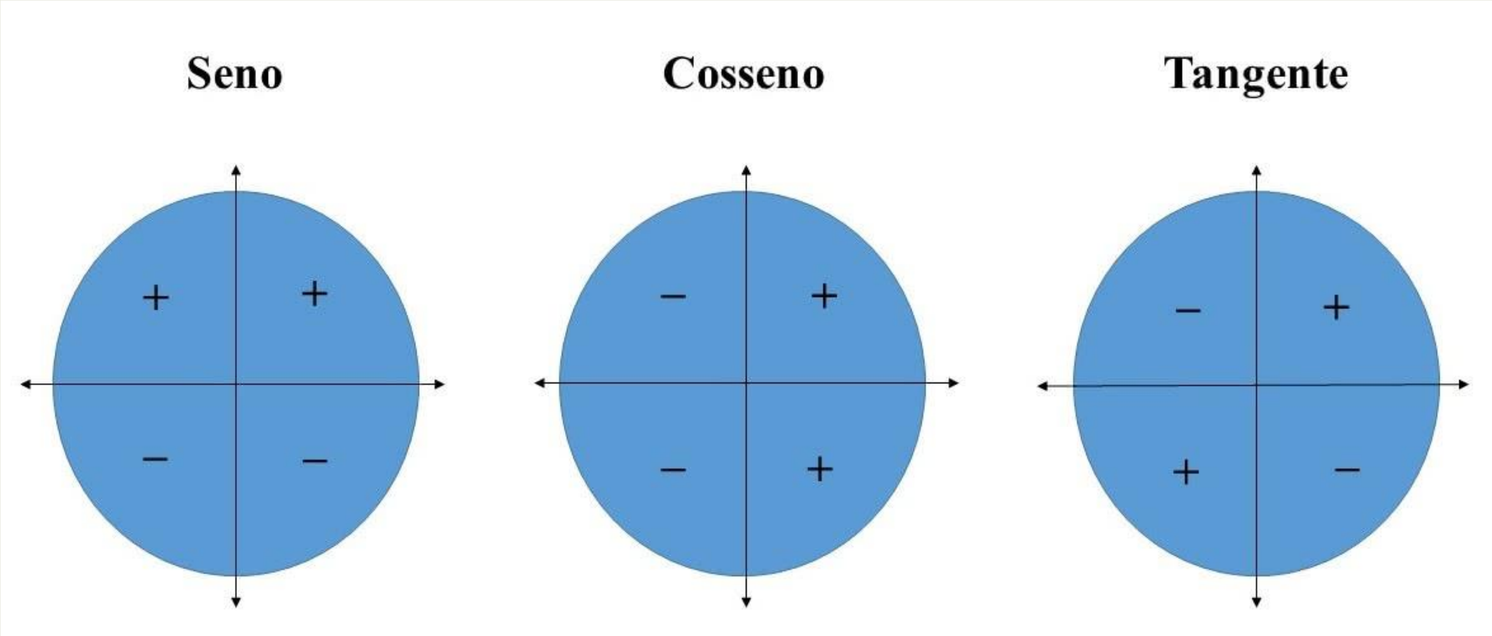
Note que o eixo das tangentes tangencia o círculo trigonométrico, daí o seu nome.

Note também que o ponto P tem o raio do círculo trigonométrico prolongado até atingir o eixo das tangentes a fim de determinar o valor da mesma. Além disso, repare que quando for 90° o prolongamento do raio não atingirá o eixo das tangentes, logo não existe a tangente de 90°.



Círculo trigonométrico – Abordagem simplificada

Nesse sentido, podemos saber os quadrantes nos quais o seno e o cosseno são positivos ou negativos. Observe a figura a seguir:



Exercícios

1) As rodas de um automóvel têm 70cm de diâmetro. Determine o número de voltas efetuadas pela roda sabendo que ele percorreu 9.891km. Adote $\pi = 3,14$.

Resposta: 4.500.000 voltas

↑

DICA: converta os valores de cm e km para metros.

DICA: Sabe-se que uma volta completa no círculo trigonométrico equivale a 2π ou 360° →

2) Obtenha as menores determinações não negativas dos arcos e a quantidade de suas respectivas voltas. As menores determinações não negativas são os ângulos encontrados nos restos percorridos da quantidade de voltas.

a) 1300°
b) 1440°
c) -1200°

Respostas:
a) 220°, 3 voltas
b) 0°, 4 voltas
c) 240°, 3 voltas (no sentido negativo)

Círculo trigonométrico

Para um melhor entendimento do assunto separamos uma aula online:

Link da aula: https://www.youtube.com/watch?v=kajpnOPk9n8

As Razões Inversas do Seno, Cosseno e da Tangente

Quais são elas?

As Razões Inversas do Seno, Cosseno e da Tangente

Secante, **cossecante** e **cotangente** são as razões inversas as razões trigonométricas já conhecidas como cosseno, seno e tangente, respectivamente, e podem ser obtidas no ciclo trigonométrico. O conhecimento das razões trigonométricas e de suas inversas auxiliará nos estudos ligados às relações fundamentais entre as funções de um mesmo arco.

Cossecante

Definimos como **cossecante** a relação que admite ser o inverso do seno, onde:

cossecX = hipotenusa/cateto oposto ou cossecX = 1/senX

Sendo senX $\neq$ 0

CUIDADO!
Como pode-se verificar, essa inversa possui em seu nome o início parecido com o do cosseno, porém não existe relação, visto que a COSSECANTE representa o inverso do SENO.

Relembrando!

Como já visto anteriormente, as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente estão associadas ao triângulo retângulo e às relações entre os catetos e a hipotenusa. Essas relações são constituídas de acordo com as seguintes razões:

senX = cateto oposto/hipotenusa

cosX = cateto adjacente/hipotenusa

tangX = cateto oposto/cateto adjacente

Secante

Definimos como **secante** a relação que admite ser o inverso do seno, onde:

secX = hipotenusa/cateto adjacente ou secX = 1/cosX

Sendo cosX $\neq$ 0

CUIDADO!
Como pode-se verificar, essa inversa possui em seu nome o início parecido com o do seno, porém não existe relação, visto que a SECANTE representa o inverso do COSSENO.

Relembrando!

Como já visto anteriormente, as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente estão associadas ao triângulo retângulo e às relações entre os catetos e a hipotenusa. Essas relações são constituídas de acordo com as seguintes razões:

senX = cateto oposto/hipotenusa

cosX = cateto adjacente/hipotenusa

tangX = cateto oposto/cateto adjacente

Cotangente

Definimos como **cotangente** a relação que admite ser o inverso do seno, onde:

cotgX = cosX/senX ou cotgX = 1/tgX

Sendo senX ≠ 0

Sabendo que cotgX = 1/tgX → cotgX = 1/(senX/cosX) → cotgX = cosX/senX

Relembrando!

Como já visto anteriormente, as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente estão associadas ao triângulo retângulo e às relações entre os catetos e a hipotenusa. Essas relações são constituídas de acordo com as seguintes razões:

senX = cateto oposto/hipotenusa

cosX = cateto adjacente/hipotenusa

tgX = cateto oposto/cateto adjacente

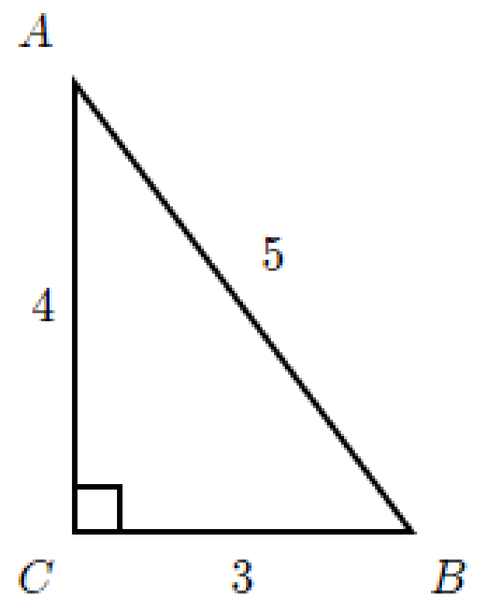
Exercícios

1) **Observando a figura e relembrando o assunto dado, responda:**

a) **Quanto é a cossecante do ângulo referente à B?**

b) **Quanto é a secante do ângulo referente à C?**

c) **Quanto é a cotangente do ângulo referente à A?**



Respostas:

a) 1.25

b) 1.66

c) 1.33

As Razões Inversas do Seno, Cosseno e da Tangente

Para um melhor entendimento do assunto separamos uma aula online:

Link da aula: https://www.youtube.com/watch?v=Q3GU5qWQUT0